I-1. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Dominio, imagen, gráfica y conjuntos de nivel

- En esta asignatura damos un salto conceptual importante, con respecto a lo estudiado en cursos anteriores: vamos a considerar funciones de varias variables reales, es decir objetos como por ejemplo $f(x,y)$ que depende de dos variables reales x e y; o $f(x,y,z)$ que depende de tres variables reales x, y y z. Entonces el objeto genérico con el que vamos a trabajar en este curso es una función de n variables reales, es decir un objeto de la forma $f(x_1, \dots, x_n)$.

- Recordemos que el conjunto de los números reales se designa por la letra $\mathbb{R}$, y que el conjunto $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todas las n-plas $(x_1, \dots, x_n)$ de números reales

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{R} = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \ \forall i = 1, \dots, n \}$$

es decir $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ consigo mismo n veces.

- Las funciones mas generales que vamos a considerar en este curso son funciones de la forma $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es decir funciones de la forma $y = f(x)$ que transforman vectores $x = (x_1, \dots x_n)$ de n componentes en vectores $y = (y_1, \dots, y_m)$ de m componentes. Una función de este tipo puede descomponerse en m funciones componentes $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$, dependientes cada una de ellas de n variables. Por ejemplo, la función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 + x_3 \\ x_1 + \sqrt{x_2 + x_3^2} \end{pmatrix}$$

se puede descomponer en 2 funciones componentes: $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 + x_3$ y $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \sqrt{x_2 + x_3^2}$. En general, una función de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se descompondrá en m funciones componentes que dispondremos como un vector columna

$$y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = f(x) \equiv \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

- A través de la descomposición en componentes, el estudio de las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ se reduce al estudio de las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Así que en este curso que podría llamarse: "Cálculo diferencial e integral para funciones de varias variables reales", el objeto central de estudio será una función real $f(x_1, \dots, x_n)$ de n variables reales.

- Notemos sin embargo que una función $f(x_1, \dots x_n)$ en general no puede descomponerse en n funciones de una variable. Luego el salto conceptual consiste en que el espacio de "partida" sobre el que están definidas las funciones (o sea sobre el que actúan) pase de ser unidimensional a ser multidimensional, mientras que el hecho de que el espacio de "llegada" (el espacio en el que toman valores las funciones) sea unidimensional o multidimensional tiene mucha menor importancia, debido a que las funciones que toman valores en un espacio de dimensión real m, pueden descomponerse en m funciones a valores en $\mathbb{R}$.

- Las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ son objetos matemáticos que sirven para modelar objetos físicos. Por ejemplo, para describir la presión en una cierta región de un fluido necesitamos una función $p: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Para describir el campo de velocidades de un fluido, el campo eléctrico o el campo magnético necesitamos funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ $\vec{v}(x,y,z)$, $\vec{E}(x,y,z)$, $\vec{B}(x,y,z)$. Para especificar la trayectoria, la velocidad, o la aceleración de un punto material necesitamos funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es decir funciones vectoriales de una variable: $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, etc.

Def 1. [Dominio de una función]

- Dada $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ llamaremos dominio de f y lo denotaremos por $\mathcal{D}(f)$ al subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por los puntos a los que es aplicable la función, es decir

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \text{ está definida}\} \subset \mathbb{R}^n$$

- Notemos que en el caso de una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se tiene $\mathcal{D}(f) = \bigcap_{j=1}^{m} \mathcal{D}(f_j)$ ya que para que una función vectorial esté definida en un punto, han de estarlo todas y cada una de sus componentes.

Def 2. [Imagen de una función]

- Dada $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ llamaremos rango o imagen de f y lo denotaremos por $\mathcal{R}(f)$ al subconjunto de puntos de $\mathbb{R}^m$ que se obtiene al aplicar la función a todos los puntos de su dominio, es decir

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^m$$

Def 3: [Gráfica de una función]

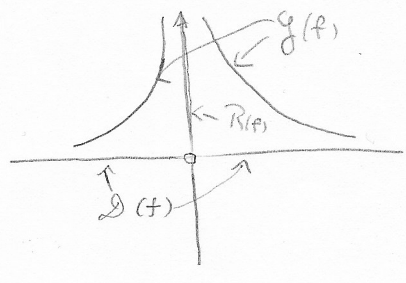
Dada $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ llamaremos grafo o gráfica de f y lo denotaremos por $\mathcal{G}(f)$ al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^{n+m}$

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

Vemos a continuación ejemplos que ilustran estos conceptos:

Ejemplo 1: Para funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es decir funciones escalares de una variable real, el dominio y la imagen son subconjuntos de $\mathbb{R}$, y (si la función es suficientemente regular) su gráfica es una curva en el plano.

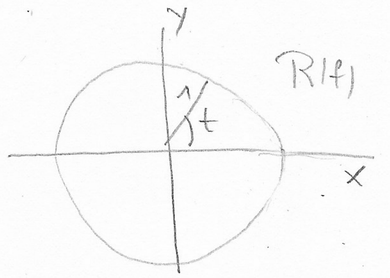
Por ejemplo para $f(x) = \frac{1}{x^2}$,
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ y
$\mathcal{G}(f)$ es la curva plana $y = \frac{1}{x^2}$.

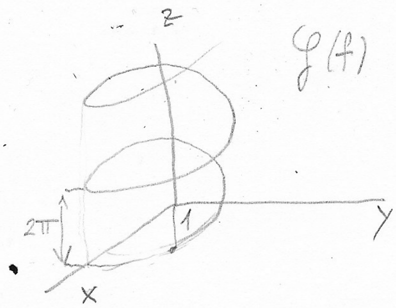


Ejemplo 2: Para funciones vectoriales de una variable, es decir para funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, el dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$, la imagen es una curva en $\mathbb{R}^m$, y la gráfica es una curva en $\mathbb{R}^{m+1}$. Por ejemplo para la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

la imagen de la función es una circunferencia de radio unidad en el plano $\mathbb{R}^2$. Sin embargo la gráfica de la función es una curva en el espacio $\mathbb{R}^3$. En este caso concreto, se trata de una hélice de radio unidad y paso 2π.



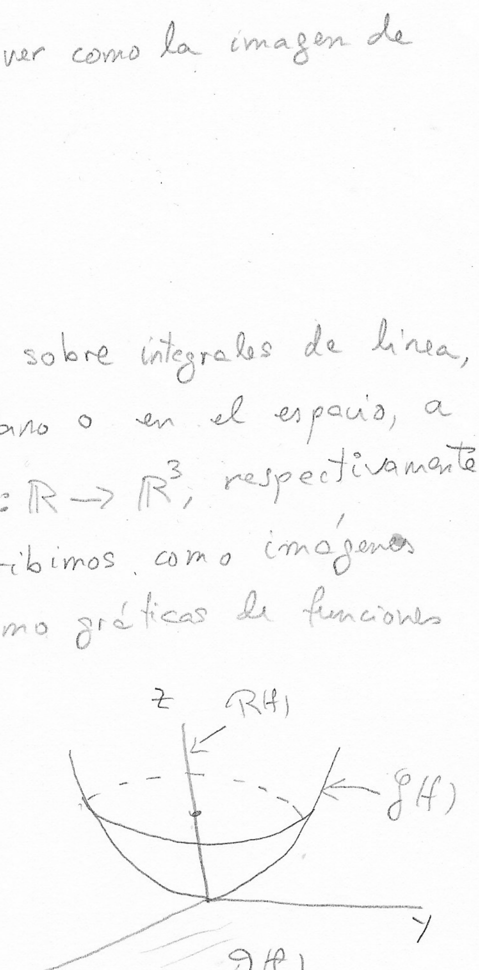


- Notemos también que esta hélice, la podemos ver como la imagen de la función vectorial $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ t \end{pmatrix}$$

- Adelantando lo que veremos en el capítulo V sobre integrales de línea, llamaremos "curvas paramétricas" en el plano o en el espacio, a las imagenes de funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ó $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, respectivamente. Es decir las curvas paramétricas las describimos como imágenes de funciones vectoriales de una variable, y no como gráficas de funciones

Ejemplo 3: Consideremos la función escalar de 2 variables $f(x,y) = x^2 + y^2$. Entonces $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{R}(f) = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$, y $\mathcal{G}(f)$ es el "paraboloide de revolución" $z = x^2 + y^2$ contenido en $\mathbb{R}^3$.



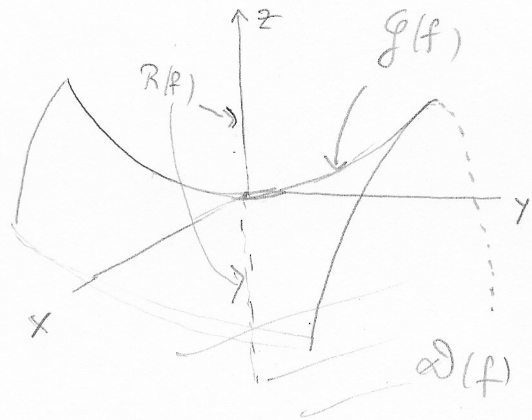
Ejemplo 4: Para la función

$g(x,y) = -x^2+y^2$, tenemos

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$,

y la gráfica de f es el "paraboloide hiperbólico" o "silla de montar"

$z+x^2-y^2=0$.



Además del dominio, la imagen y la gráfica, otros conjuntos interesantes asociados a las funciones escalares de varias variables y que sirven también para visualizarlas son los "conjuntos de nivel".

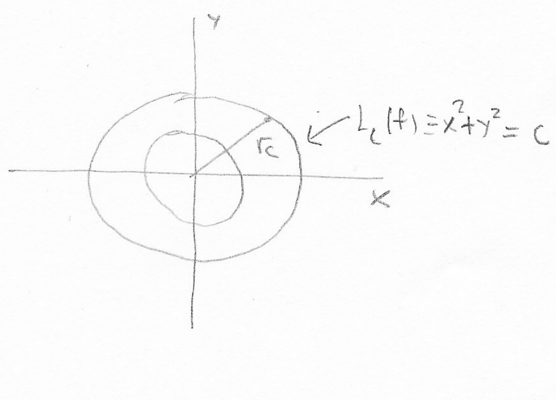
Def 4 [Conjuntos de nivel]

Dada una función escalar de n variables reales $f(x_1, \dots, x_n)$, y un número real c, llamamos conjunto de nivel de valor c para la función f al siguiente subconjunto de puntos del dominio de f

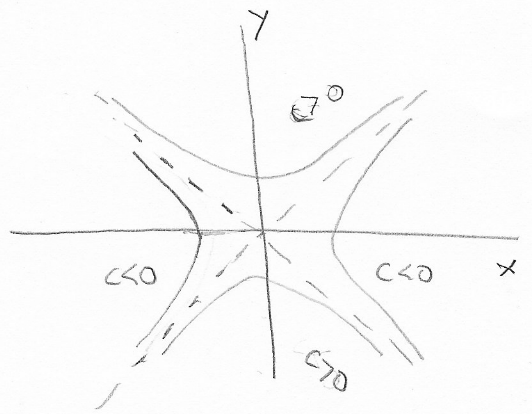
$$L_c(f) = \{ x \in \mathcal{D}(f) \mid f(x) = c \} \subset \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^n.$$

Es decir el conjunto de nivel c, es el lugar geométrico formado por los puntos sobre los cuales la función toma el valor c. Para funciones de dos variables los conjuntos de nivel se llaman "curvas de nivel" y para funciones de tres variables se llaman superficies de nivel. Notemos que si $c \notin \mathcal{R}(f)$ el conjunto $L_c(f)$ es vacío.

Ejemplo 5: Para la función del ejemplo 3, si $c>0$, las curvas de nivel son las circunferencias $x^2+y^2=c$, con radio $\sqrt{c}$, centradas en el origen. Para $c=0$, la curva de nivel (degenerada) es el punto $(0,0)$; y para $c<0$, $L_c(f) = \emptyset$ porque la función no toma valores negativos.

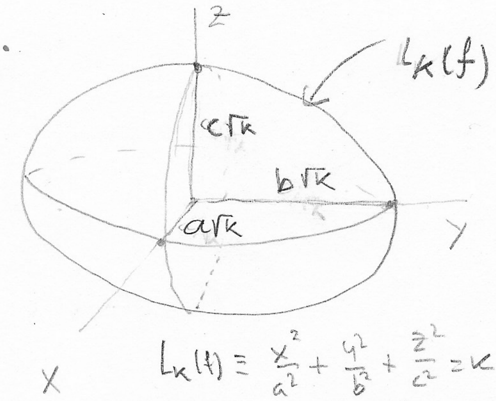


Ejemplo 6: Para la función del ejemplo 4, si $c \neq 0$, las curvas de nivel son las hipérbolas $-x^2+y^2=c$. Estas hipérbolas tienen dos ramas que se abren hacia el eje "x" si $c<0$, y hacia el eje "y" si $c>0$. Para $c=0$, el conjunto de nivel es el par de rectas $y = \pm x$ (Obsérvese que $-x^2+y^2 = (y+x)(y-x)$.



Ejemplo 7: Para la función de tres variables $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, tenemos

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3$, y $R(f) = [0,\infty)$.

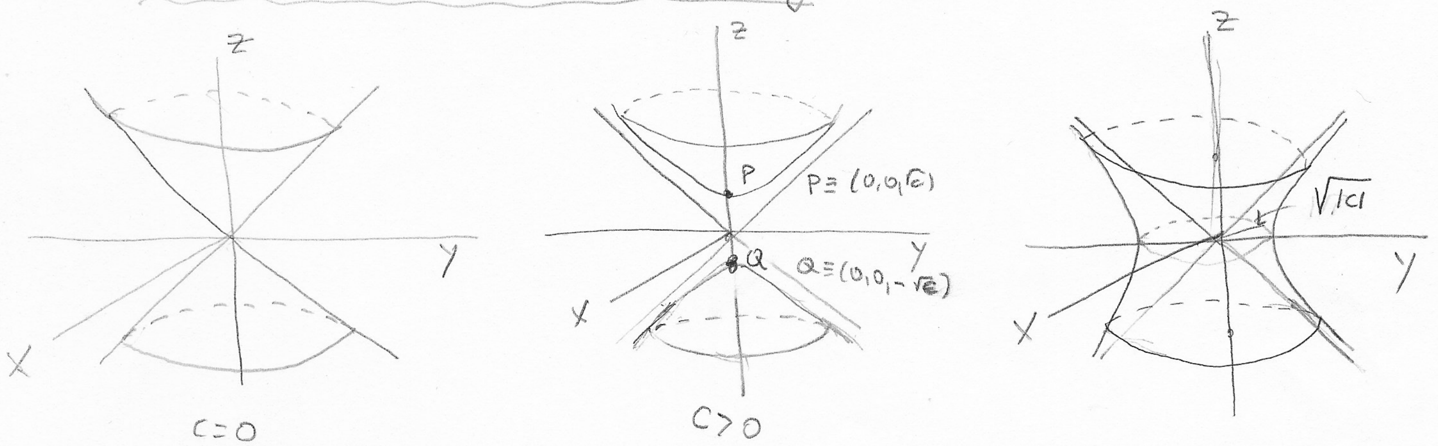


$$L_K(f) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = K$$

$$\hookrightarrow \frac{x^2}{(a\sqrt{k})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{k})^2} + \frac{z^2}{(c\sqrt{k})^2} = 1$$

No podemos dibujar la gráfica porque se trata de un conjunto tridimensional inmerso en $\mathbb{R}^4$. Pero podemos visualizar la función mediante las superficies de nivel $f(x,y,z) = K$. Para $K>0$ las superficies de nivel son elipsoides con semiejes $a\sqrt{k}, b\sqrt{k}, c\sqrt{k}$. Para $k=0$, la superficie de nivel degenerada es el origen de coordenadas, y para $K<0$, $L_K(f) = \phi$

Ejemplo 8: Para la función de tres variables $g(x,y,z) = z^2-x^2-y^2$, tenemos $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3$, $R(f) = \mathbb{R}$. Para $c=0$, la superficie de nivel es el cono de doble hoja $z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$. Para $c>0$ las superficies de nivel son hiperboloides de revolución de dos hojas con vértices en los puntos $(0,0,\pm\sqrt{c})$, y para $c<0$ son hiberboloides de revolución de una hoja



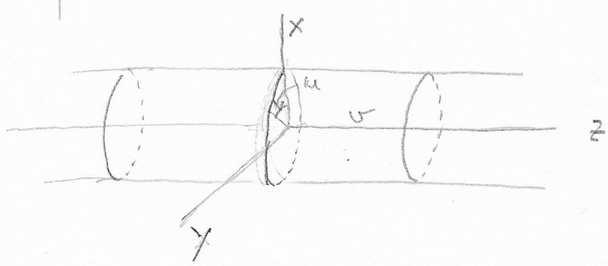
$c=0$ $\quad$ $c>0$ $\quad$ $c<0$

Ejemplo 9:

- En la teoría de integración sobre superficies que estudiaremos en el tema V, utilizaremos el concepto de superficie paramétrica. Una superficie paramétrica inmersa en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ se define como la imagen de una función vectorial $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Veamos algunos ejemplos. La imagen de la función

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos u \\ a \operatorname{sen} u \\ v \end{pmatrix}$$

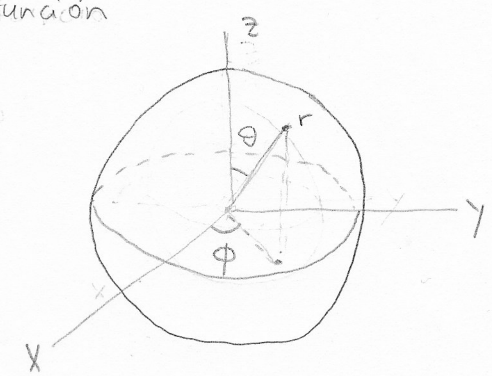
es una superficie cilíndrica de radio a.



Como otro ejemplo, la imagen de la función

$$\begin{pmatrix} x(\theta,\phi) \\ y(\theta,\phi) \\ z(\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$$

es una superficie esférica de radio r



- Notemos que además de como superficies paramétricas, las superficies pueden también definirse como gráficas de funciones de dos variables $f(x,y)$. En este caso la gráfica de la función $f(x,y)$ corresponde a la superficie paramétrica dada por la imagen de la función $\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$

- Una tercera forma de dar una superficie es como un conjunto de nivel de una función de tres variables, es decir como el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación $F(x,y,z) = c$. En este caso se dice que la superficie está dada en forma cartesiana.